chap 1 : Dérivation des fonctions numériques.

I/ continuité :

- f fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$; $a_0 \in I$

f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a_0} f(x) = f(a_0)$.

* $I =]a, b[$; f est continue sur I si elle est continue en tous réel de I

* $I = [a, b]$; f " " " " " " " " sur $]a,b[$ et

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

*** théorème des valeurs intermédiaires :**

f ~~est~~ continue sur $I = [a, b]$; si $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ f s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

* si f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors :

$f(x) = k$ admet une solution unique sur $[a, b]$.

$$\boxed{k \in [\overset{\text{تصاعدي}}{f(a), f(b)}]_{\text{تنازلي}}}$$

En particulier : si f strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ f s'annule une seule fois sur $]a, b[$.

*** Résolution d'équations par dichotomie** $\left[\frac{a+b}{2}\right]$

[illegible]

Ex : Donner une approximation de la solution α de l'équation $\boxed{x^3 + x - 1 = 0}$

$f = x^3 + x - 1$; f est défini et continue sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: — ①

$f'(x) = x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ — Sol unique

$f(0) = \overset{<0}{-1}$; $f(1) = \overset{>0}{1}$ $\Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0, 1[$

le milieu est $\frac{0+1}{2} = 0{,}5$; $f(0{,}5) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5 ; 1[$

" est $\frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$; $f(0{,}75) > 0 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5 ; 0{,}75[$.

" est $\frac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625$; $f(0{,}625) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0{,}625 ; 0{,}75[$.

" est $\frac{0{,}625+0{,}75}{2} = 0{,}6875$; $f(0{,}6875) > 0 \Rightarrow \alpha \in]0{,}625 ; 0{,}6875[$.

II Dérivabilité

f définie sur $I \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- f est dérivable en x_0 si : $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \ell \in \mathbb{R}$

s'appelle nombre dérivé ou taux d'accroissement

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si on pose $x = x_0 + h$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

graphiquement ~~f(x0)~~ la courbe de f admet une tangente de pente $f'(x_0)$ en x_0. $\boxed{\text{éq} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

* si $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ la tangente est horizontale (maximum ou minimum)
$f'(x)$ s'annule en changeant de signe

* si $f''(x_0) = 0$ en changeant de signe un point d'inflexion

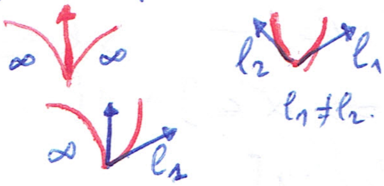
Ex $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$.

* $f''(x)$ s'annule en $x_0 = \frac{2}{3}$ en changeant de signe
donc $x_0 = \frac{2}{3}$ est un point d'inflexion

* $f'(x) = 0 \longrightarrow x_{01} = \frac{1}{3}$, $x_{02} = 1$ 02 point ~~extremes~~ extremums

* Si $f(x)$ n'est pas dérivable en x_0 ce point est un point Anguleux.
((C) admet 02 demi-tangeantes)



* Si f est dérivable en x_0 elle est continue en ce point la réciprocité est fausse.

Ex $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$

* f est continue en $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x} = 1$ n'est dérivable en $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x - 0}{x} = -1$

* $f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x)$?

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = 2x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 2x}$$

* $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x)$???

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \cos x_0 \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = f'(x_0) = (\sin x)'|_{x = x_0} = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (e^x)'|_{x=0} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

*Opérations de dérivation :

$(f \mp g)' = f' \mp g'$; $(kf)' = kf'$; $(f.g)' = f'.g + f.g'$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(x^n)' = n.x^{n-1}$; $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\left(\frac{1}{f^n}\right)' = -n.\frac{f'}{f^{n+1}}$

$$\boxed{(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = g'(x).f'(g(x))}$$

$(e^{f(x)})' = f'(x).e^{f(x)}$; $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

EX $f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$

$f'(x) = (\cos x - \sin x)e^x + e^x(\sin x + \cos x) = 2\cos x\, e^x$

MINI EXO :

$f(x) = e^{x^2 - 2x + 3}$ $\mathbb{R}$; $g(x) = e^{1/x}$ $\mathbb{R}^*$; $h(x) = e^{\cos x - 2\sin x}$ $\mathbb{R}$; $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. $\begin{cases} \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases}$

$f_1(x) = x^2 + \frac{1}{x} + e^x$ $\mathbb{R}^*$; $g_1(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $\mathbb{R}^*$ 0^*

* dérivée de la fonction réciproque (Inverse) :

f est une fonction continue et strictement monotone de $I \longrightarrow f(I)$ $\Rightarrow$ il y a f^{-1} de $f(I) \longrightarrow I$

f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens que f

C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétrique par rapport à $y = x$ ($1^{\text{ère}}$ bissectrice).

*

* f dérivable sur I $\Rightarrow$ f^{-1} dérivable sur $f(I)$; $f'(x_0) \neq 0$

$$\boxed{\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}}$$

EX $\quad f(x) = 2\cos x - \cos 2x. \qquad I = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ C et D sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

$$f'(x) = 2\sin x\,(2\cos x - 1).$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

dans $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$; $\cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos x - 1 < 0$.

et $\sin x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

f décroissante strictement

$\longrightarrow$ f admet une f^{-1} de $\left[-3, \frac{3}{2}\right] \longrightarrow \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$$\begin{cases} f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4} \\ f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \left(f^{-1}(\underbrace{-\sqrt{2}}_{y_0})\right)' = \frac{1}{f'\left(\underbrace{f^{-1}(-\sqrt{2})}_{\frac{3\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{\underbrace{f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \end{cases}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \\ f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} \Rightarrow \left(f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Rightarrow \left(f^{-1}(1)\right)' = -\frac{1}{2}$$

$$\cancel{\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x_0))'}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos(x)^2}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

$$= 1 + y^2.$$

$$(\operatorname{Arctg}(y))' = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\boxed{y = f(x) = \operatorname{tg}(x)}$$

$$\boxed{x = \operatorname{tg}^{-1}(y)}$$

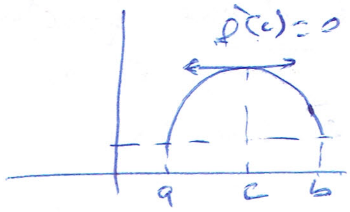
$$\boxed{(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x.}$$

* Théorème de ROLLE :

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
- f continue sur $[a,b]$
- f dérivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\;/\; f'(c) = 0$



<u>EX</u> : $f(x) = x^7 - x^4 + x^2 - x$.

f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(1) = 0 = f(0) \Longrightarrow \exists\, c \in]0,1[\;/\; f'(c) = 0$.

c est un point extrémum

* Théorème des accroissements finis TAF :

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
- f. continue sur $[a,b]$.
- f dérivable sur $]a,b[$
- $\Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\;/$ $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

<u>EX</u> à l'aide du TAF montrer que :

* $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$
* donner un encadrement pour $\boxed{\ln(2)}$

<u>Sol</u> $f(x) = \ln x$ $\quad f$ D, C, D sur $]x, x+1[$.

donc $\exists\, c \in]x, x+1[\;/\; f'(c) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$.

$\Longrightarrow f'(c) = \dfrac{1}{c} = \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{1}$

$x < c < x+1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$. $\Longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}}$

Si $x = 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2} < \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} < 1$

$\Longrightarrow \boxed{0{,}5 < \ln 2 < 1}$

* Dérivée partielle d'une fonction :

fonctions à plusieurs variables.

EX $\boxed{f(x,y) = x^3 e^y + \sin^2 y + 3x}$

$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 e^y + 3$; $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^y + 2 \sin y \cos y = x^3 e^y + \sin 2y$

y = constante   x constante

$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$; $f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x^3 e^y + 2\cos 2y$.

$= 6xe^y$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 3x^2 e^y$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3x^2 e^y$

EX : calculer les dérivées premières et secondes de $f(x)$.

$f(x) = e^{xy}$.

* Différentielle totale :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

EX : Calculer la différentielle totale de $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Sol :

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \boxed{df = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\left[y\,dx - x\,dy\right]}$

TD N° 01

EXO 01 :

Soit la fonction $f(x) = x^4 - x - 1$

1/ Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [1, 2]$.

2/ Donner une approximation de α au voisinage de 5×10^{-2}

EXO 02 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

1/ Déterminer $f'(x)$.

2/ Soit la fonction P définie par $P(x) = -x^3 - 3x + 2$

a/ Etudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.

b/ En déduire que $P(x) = 0$ admet une solution unique notée $\alpha \in \mathbb{R}$

c/ " " le signe de $P(x)$.

d/ Démontrer que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

e/ Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

3/ En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de $f(x)$.

EXO 03 :

Soit la fonction $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1/ Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2/ Montrer que f admet un point d'inflexion A. Donner l'équation de la tangente en A

EXO 04 :

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; 1/ Calculer $f'(x)$. ; 2/ En déduire la dérivée des fonctions :

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$; $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; $k(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2}$; $l(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\sin(x)-2}$.

EXO 05 :

Soit $f(x) = e^x \cos(x)$.

1/ Calculer $f'(x)$ et mettre sous la forme : $f'(x) = A e^x \cos(x + \alpha)$

2/ Déterminer la dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de la fonction f.

EXO 06

Donner une approximation de la variation de volume d'un cylindre de rayon $r = 10$ cm et de hauteur $h = 50$ cm quand r augmente de 1 cm et h diminue de 2 cm. $(V = \pi r^2 h)$

PRIMITIVES - INTEGRALES

Primitives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Une fonction F est une primitive de f sur I, si et seulement si, elle est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$

Exemple

La fonction $f : x \rightarrow 10x + 3$ admet pour primitive sur **R** la fonction $F : x \rightarrow 5x^2 + 3x$

f admet aussi la fonction $F_1 : x \rightarrow 5x^2 + 3x + 2$ pour primitive sur **R** ; en effet

$$F'(x) = F_1'(x) = f(x) = 10x + 3$$

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I

Toute primitive de f sur I est de la forme $G : \quad x \rightarrow F(x) + C$ où C est une constante réelle

Démonstration

G est dérivable sur I et $G' = F' = f$

Donc, $\forall x \in I$, $G'(x) - F'(x) = (G - F)'(x) = 0$

Puisque $(G - F)' = 0$ sur I, alors d'après un théorème du chapitre dérivation $G - F = C$

où C est une constante réelle

Par conséquent : $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + C$

Interprétation graphique : les courbes représentatives des fonctions primitives de f se déduisent les unes des autres par les translations de vecteur $C\,j$ avec $C \in \mathbf{R}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3x - 5$

Déterminer les primitives F de f sur **R** .

f est une fonction polynôme, donc f est continue sur **R** et elle admet des primitives sur **R** .

La fonction f admet pour primitives sur **R** les fonctions F :

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C , \quad où\ C \in \mathbf{R}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \cos 4x - 3\sin 2x + \cos x$

Déterminer les primitives F de f sur **R** .

La fonction f est continue sur **R** et elle admet des primitives sur **R** .

D'après le tableau des primitives usuelles, les fonctions :

$$x \to \cos 4x, \quad x \to \sin 2x, \quad x \to \cos x$$

admettent respectivement pour primitives les fonctions :

$$x \to \frac{1}{4}\sin 4x, \quad x \to -\frac{1}{2}\cos 2x, \quad x \to \sin x$$

La fonction *f* admet pour primitives sur **R** les fonctions *F* :

$$F(x) = \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{3}{2}\cos 2x + \sin x + C \ , \ \text{où } C \in \mathbf{R}$$

Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Théorème

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Soit x_0 un réel appartenant à *I* et y_0 un réel quelconque.

Alors, il existe une primitive *F* de *f*, et une seule, telle que $F(x_0) = y_0$

Démonstration

Soit *F* une primitive de *f* sur *I*, alors d'après le théorème précédent, toute primitive de *f* sur *I* est une fonction *G* de la forme

$$G : x \to F(x) + C \text{ avec } C \in \mathbf{R}$$

La condition $G(x_0) = y_0$ donne $F(x_0) + C = y_0$ *ou encore* $C = y_0 - F(x_0)$

Puisque nous avons trouvé une valeur et une seule de C, il existe donc une primitive et une seule de *f* sur *I* telle que $F(x_0) = y_0$, soit la fonction $F : x \to F(x) + y_0 - F(x_0)$

Interprétation graphique

Parmi toutes les courbes représentant les primitives de *f* sur *I*, il en existe une et une seule passant par le point de coordonnées (x_0, y_0)

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f : x \to x^2 - 3x + 2$

Déterminer la primitive *F* de *f* sur **R** qui s'annule en 1

L’ensemble des primitives de f sur **R** sont les fonctions

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \text{ avec } C \in \mathbf{R}$$

La condition $F(1) = 0$ impose

$$F(1) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + C = 0$$

soit

$$C = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{5}{6}$$

La primitive de f qui s’annule pour $x = 1$ est la fonction $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f : x \to \sin 2x$

Déterminer la primitive F de f sur **R** qui prend la valeur 1 pour $x = \frac{\pi}{2}$

L’ensemble des primitives de f sur **R** sont les fonctions $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C \text{ avec } C \in \mathbf{R}$

La condition $F(\frac{\pi}{2}) = 1$ impose

$$F(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\cos\pi + C = 1$$

soit

$$C = \frac{1}{2} \quad \textit{puisque} \quad \cos\pi = -1$$

La primitive de f qui prend la valeur 1 pour $x = \frac{\pi}{2}$ est la fonction $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

Primitives des fonctions usuelles

La lecture à l'envers du tableau donnant les fonctions dérivées des fonctions usuelles permet de dresser un premier tableau de primitives usuelles.

Fonction f définie par	Primitive F *de* f	Sur I
$f(x) = a$ où a est une constante	$F(x) = ax + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I = \mathbf{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I = \mathbf{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I =]0, +\infty[$ *ou* $I =]-\infty, 0[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I =]0, +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I = \mathbf{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I = \mathbf{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + C,\ C \in \mathbf{R}$	$I = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[,\ n \in \mathbf{N}$

Opérations sur les primitives

Propriété

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors:

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I
- $\forall k \in \mathbf{R}$, kF est une primitive de kf sur I

Le tableau suivant découle des règles de dérivation des fonctions.

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction f	Primitives F sur I	I
$u'u^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$, $C \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$, $C \in \mathbf{R}$	$\forall x \in I$ avec $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$, $C \in \mathbf{R}$	$\forall x \in I$ avec $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}} + C$, $C \in \mathbf{R}$	$\forall x \in I$ avec $u(x) \neq 0$

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction $f \ : \ x \to x(1+x^2)^3$ sur $\mathbf{R}$

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, l'intégrale existe

Posons $u(x) = 1+x^2$ alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)\,u^3(x)$

Les fonctions F définies sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}u^4(x) + C = \frac{1}{8}(1+x^2)^4 + C$ avec $C \in \mathbf{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbf{R}$.

Définition d'une intégrale

Soient *f* une fonction définie sur un intervalle *I* et *F* une de ces primitives, soient *a* et *b* deux points de *I*.

La quantité $F(b)-F(a)$ (encore notée $\left[F(x)\right]_a^b$) est appelée intégrale de *f* entre *a* et *b* et est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de *a* à *b* de *f* » (ou de *f(x)dx*)

Attention

l'ordre de *a* et de *b* est important

Le nombre *a* est appelé borne inférieure et *b* la borne supérieure de l'intégrale.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

1) En faisant $a = b$ *alors* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) Le résultat du calcul d'une intégrale ne dépend pas de la primitive choisie

En effet si F *et* F_1 sont deux primitives de *f*, alors elles diffèrent d'une constante

$$F_1 = F + C \quad avec\ C \in \mathbf{R}$$

et

$$\left[F_1(x)\right]_a^b = \left[F(x) + C\right]_a^b = \left(F(b) + C\right) - \left(F(a) + C\right) = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

En pratique, pour la plupart des exemples, on ne tient pas compte de la constante d'intégration.

Exemple Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{2} (2x^2 + 3)\,dx$

L'intégrale existe puisque la fonction $f(x) = 2x^2 + 3$ est continue sur $[-1, 2]$

La fonction f admet pour primitive la fonction F(x)= $\frac{2}{3}x^3 + 3x$ sur $[-1, 2]$

(On prend la plupart du temps la primitive ne faisant pas apparaître la constante réelle C)

et donc $\int_{-1}^{2} (2x^2 + 3)\,dx = F(2) - F(-1) = \left[\frac{2}{3}x^3 + 3x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{16}{3} + 6\right) - \left(-\frac{2}{3} - 3\right) = 15$

Exemple Calculer l'intégrale $\int_0^1 (\sqrt{x} - 1)^2\,dx$

La fonction $f : x \to (\sqrt{x} - 1)^2$ est continue sur $[0, 1]$, l'intégrale existe

Développons le carré : $(\sqrt{x} - 1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1 = x - 2x^{1/2} + 1$

Une primitive de *f* est la fonction $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + x = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + x$

(On prend la plupart du temps la primitive ne faisant pas apparaître la constante réelle C)

Alors $\int_0^1 (\sqrt{x} - 1)^2\,dx = F(1) - F(0) = \left[x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{x^3 + x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{6}$

Intégrale et aire.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

D est la région du plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation

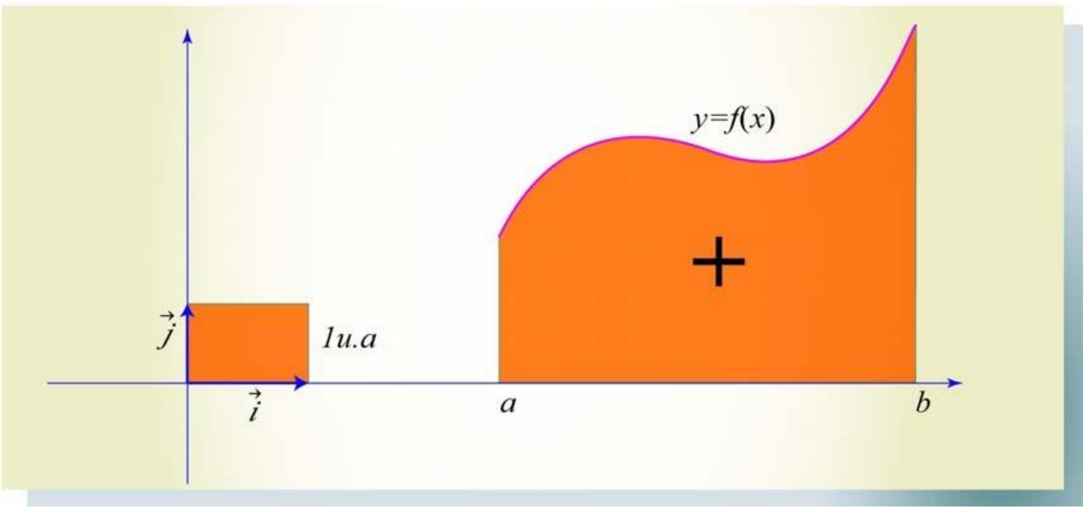
$x = a$ et $x = b$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi.

Théorème

Cas d'une fonction positive

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalla $[\ a\ ,\ b\ ]$, l'aire de D , mesurée en unités d'aire, est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$

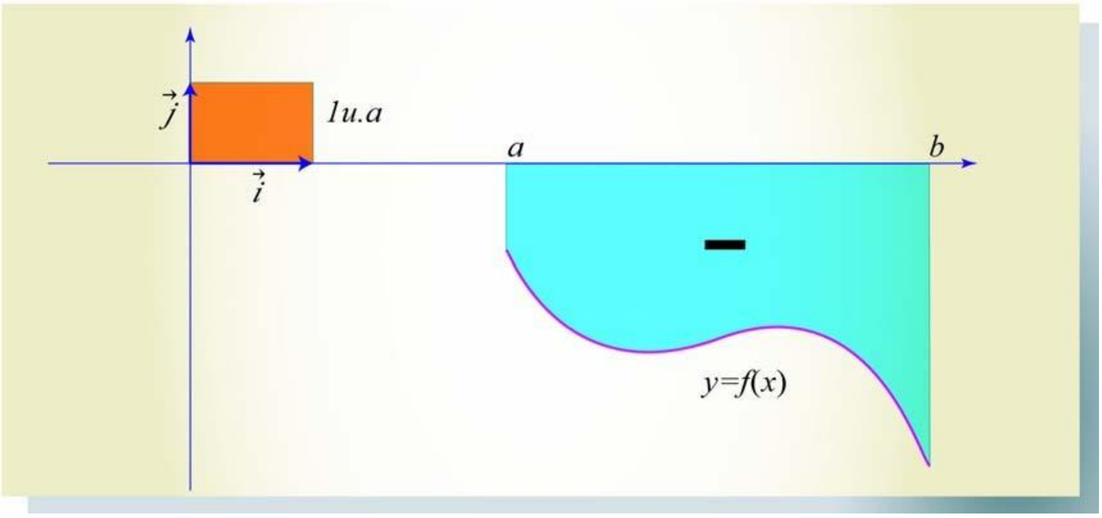


$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Aire } (D)$$

Corollaire

- Cas d'une fonction négative

Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[\ a\ ,\ b\ ]$, l'aire de D , mesurée en unités d'aire, est égale à $-\int_a^b f(x)\,dx$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{ Aire }(D)$$

- Cas d'une fonction de signe quelconque

Si *f* est une fonction continue et de signe quelconque sur l'intervalle $[\ a\ ,\ b\ ]$, l'aire de *D*, mesurée en unités d'aire, est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses, diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses.

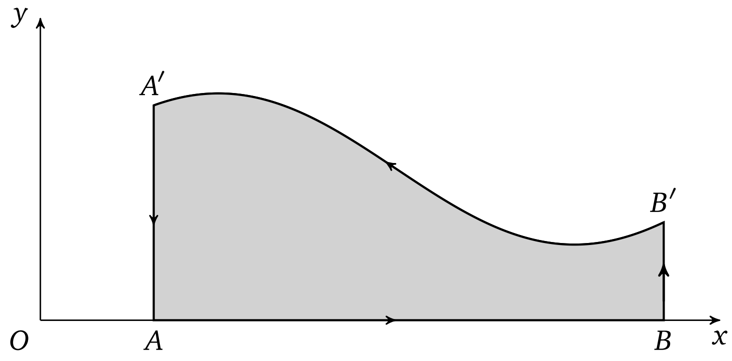


FIGURE I.1 — *Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.*

Par définition **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{I}_f$ est l'intégrale entre a et b de f :

$$\mathscr{A}\left(\mathscr{I}_f\right) = \int_a^b f$$

III — Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.1 — Relation de Chasles
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I.

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

**Corollaire 3.2 — ** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}$, $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\,a\,;\,b\,]^n$.*

On a $$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \int_{x_1}^{x_n} f$$

Propriété 3.3 — Linéarité de l'intégrale
Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I, et donc*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I, et donc*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

**Corollaire 3.4 — ** *Soit $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ n fonctions continues sur I.*

On a $$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k$$

Propriété 3.5 — Positivité de l'intégrale
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a,b) \in I^2$.

Si $a \leqslant b$ et si f est positive alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

Si, de plus $\int_a^b f = 0$ *alors* f *est nulle entre sur* $[\,a\,;\,b\,]$.

Corollaire 3.6 — « Croissance » de l'intégrale
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues.*

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ et si} \quad f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Proposition 3.7 — *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $(a, b) \in I^2$.

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

IV — Méthodes de calcul d'intégrales

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire
Soit u *une fonction de classe* C^1 *sur* I, *qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors*

- u^{n+1} *est une primitive de* $-(n+1)u'u^n$ *sur* I *(avec* $n \neq -1$*) ;*
- $1/u$ *est une primitive de* $-u'/u^2$ *sur* I *;*
- $\ln|u|$ *est une primitive de* u'/u *sur* I.

Théorème 4.2 — Intégration par parties
Soient u *et* v *deux fonctions de classe* C^1 *sur* I *et* $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v$$

Propriété 4.3 — *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $u : J \longrightarrow I$.
Si f *et* u *sont de classe* C^1 *alors la fonction* $\varphi : \left| \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u'(x)f'(u(x)) \end{array} \right.$ *admet pour primitive la fonction* $f \circ u$.

Théorème 4.4 — Changement de variables – I
Soit $(a, b) \in I^2$, u *une fonction de classe* C^1 *de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction définie sur l'intervalle* $u\langle I\rangle$. *On a l'égalité*

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Théorème 4.5 — Changement de variables – II
Soit $(a, b) \in I^2$, f *une fonction continue sur* I. *Soit* u *une fonction définie sur* $[\,a\,;\,b\,]$, *de classe* C^1 *sur cet intervalle et strictement monotone. On a alors*

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x))\, u'(x)\, \mathrm{d}x$$

Proposition 4.6 — *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

- *Si* f *est paire et si* $[-\alpha\,;\,\alpha] \subset I$ *alors* $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2\int_0^{\alpha} f$ *;*
- *si* f *est impaire et si* $[-\alpha\,;\,\alpha] \subset I$ *alors* $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$*;*

TD : Integrale des fonctions.

EXO 1

calculer $I = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$

En déduire $K = \int_0^{\pi} (2\cos x - 3\sin x) \, dx$

EXO 2

calculer par 02 methodes $I = \int_0^{\pi/3} \cos x \sin x \, dx$

EXO 3

calculer l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$.

EXO 4

calculer $I = \int_{-3}^{3} x^5 \cos x \, dx$ et $J = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, dx$.

EXO 5

calculer $\int_{+\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx$.

EXO 6

calculer $I = \int_0^{\pi/2} 2\cos x \, e^{3\sin x} \, dx$

EXO 7

1/ Montrer que $F(x) = x\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = \cos x - x\sin x$

2/ En déduire que $I = \int_0^{\pi} (\cos x - x\sin x) \, dx = -\pi$.

EXO 8 :

$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} \, dx$ et $J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \, dx$.

1/ calculer $I + J$.

2/ " $I - J$

3/ En déduire I et J.

Solution TD

$\boxed{f = \cos(ax+b) \to F = \frac{\sin(ax+b)}{a}}$

Exo 1

calculer $I = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$ $(=0)$ et $J = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$ $(=2)$.

En déduire $K = \int_0^{\pi} (2\cos x - 3\sin x)\, dx$.

linéarité de l'intégrale

$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx$

$\longrightarrow \boxed{K = 2I - 3J = -6}$

Exo 2

calculer de 2 méthode l'intégrale $I = \int_0^{\pi/3} \cos x \sin x \, dx$

3ème méthode par partie

1ère $I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{8}$.

2ème $\int u' u^{n+1} dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x) + C$

$\int \underset{u'}{\cos x} \underset{u^{n+1}}{\sin x} \, dx \longrightarrow \frac{1}{2} \left(\sin^2 x \right)_0^{\pi/3} \longrightarrow \frac{3}{8}$.

Exo 3

calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$.

1ère $I = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int \cos x - \int \underset{u'}{\cos x} \underset{u^2}{\sin^2 x} \, dx = \frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3}$.

2ème $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$. (linéarisation).

Exo 4

calculer $I = \int_{-3}^{3} x^5 \cos x \, dx$ et $J = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, dx$.

Rappel : * f. est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$ $a \geq 0$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_0^a f(x)\, dx.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0}$$

* f. est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$ $a \geq 0$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\, dx.$$

* $I = \int_{-3}^{3} x^5 \cos x \, dx$ $\quad f(x) = x^5 \cos x \longrightarrow f(-x) = -f(x)$. impaire

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-3}^{3} f(x)\, dx = 0}$$

* $J = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx$ $\quad f(x) = |\sin x|$ $\quad f(-x) = |-\sin x| = f(x)$ paire

$$J = 2\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 - 2\cos \pi = 4$$

Exo 5

calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg\,x\,dx = -\ln(\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ / $\cos x > 0$ dans $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

$= \boxed{\ln(\sqrt{2})}$

$$\int \frac{U'(x)}{U(x)}\,dx = \ln|U(x)| + C \quad / \ U(x) > 0$$

* f continue sur $[a,b]$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0 \end{cases}$$

Exo 6

calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e\cos x\, e^{3\sin x}\,dx$. , $\boxed{\int U' e^U = e^U + c}$

$= \frac{3e^3}{3} - \frac{e}{3}$.

Exo 7

$I = \int_0^{\pi}$

1/ Montrer que $F(x) = x\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonct[ion]

$f(x) = \cos x - x\sin x$

2/ En déduire la valeur de l'intégrale :

$I = \int_0^{\pi} (\cos x - x\sin x)\,dx = \boxed{-\pi}$

Exo 8

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}\,dx.$$

1/ calculer $I + J$

2/ " $I - J$

3/ En déduire I et J.

__Sol__ :

$I + J = -\ln|U(x)|\Big]_0^{\pi/6}$ $\longrightarrow \frac{U'}{U}$, $U = \cos x - \sin x$.

$\boxed{I + J = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}$

$I - J = \int 1\,dx = \frac{\pi}{6}$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} I = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \frac{\pi}{12} \\ J = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

Exo 9

$I = \int_0^{\pi/2} \cos 3x \sin 5x\,dx. = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 8x + \sin 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}$.

Exo 10 $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin^2 x$ sur $[0, \pi]$.

__repère orthonormé__

calculer l'aire du domaine délimité par C_f, l'axe des ~~abs~~ abscisses et les droites $x = 0$, $x = \pi$.

__Sol__

$[0,\pi]$ f est $< 0 \rightarrow \int f(x)\,dx < 0$

$\boxed{Aire = -\int_0^{\pi} f(x)\,dx}$

$= \boxed{\frac{3\pi}{4}\ u.a}$

$f > 0 \rightarrow A = \int f$[...]

$f < 0 \rightarrow A = -\int f$[...]